

ДИАГНОСТИКА СОСТОЯНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ТРАНСИОНОСФЕРНОГО КАНАЛА ПО ТРАЕКТОРНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ РЕПЕРНОГО СИГНАЛА

Афанасьев Н.Т.(1), Танаев А.Б.(1), Чудаев С.О.(2)

(1) *Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия*
(2) *Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск, Россия*
spacemaklay@gmail.com

Для обеспечения надежности и помехоустойчивости систем спутниковой связи, использующих пониженные рабочие частоты, важно иметь сведения о физических параметрах и свойствах неоднородностей околоземной плазмы. В условиях случайно-неоднородной ионосферы эти сведения известны с большой долей неопределенности. Между тем, флуктуации характеристик реперного сигнала, прошедшего сквозь ионосферу, несут в себе информацию о случайных неоднородностях среды. Таким образом, для успешного использования транссионосферного канала полезна оперативная оценка ожидаемых характеристик основного сигнала по данным измерений характеристик реперного сигнала. Эффективность прямой диагностики транссионосферного канала во многом зависит от точности функциональных соотношений, связывающих характеристики основного и реперного сигналов. Поэтому представляет интерес получить некоторые такие соотношения в задаче распространения сигналов сквозь случайно-неоднородную ионосферу.

В общем случае стохастический транссионосферный канал представляет собой сложную многосвязную систему [Davies, 1990]. Вследствие многообразия параметров случайных неоднородностей диагностика канала представляет большую проблему. В частности, при оценке статистических характеристик сигнала встает вопрос о форме спектра случайных неоднородностей канала. Нет полной ясности о пространственном распределении неоднородностей по всей толще ионосферы. Между тем, оценка статистических характеристик сигнала в ионосферном канале возможна с использованием модели случайно-неоднородной среды с обобщенными (интегральными) свойствами. В данном направлении были получены важные результаты благодаря введению представлений об эффективном корреляционном эллипсоиде, приближенно описывающим случайные неоднородности ионосферы [Гусев, Овчинникова, 1980] и позволяющим существенно упростить аналитические расчеты статистических моментов сигнала. Несмотря на то, что ионосфера является многомасштабной случайно-неоднородной средой и характеризуется степенным спектром неоднородностей, в ряде случаев при расчетах низших моментов траекторных характеристик сигнала можно использовать гауссов корреляционный эллипсоид неоднородностей с эффективными параметрами. В частности, исследования [Алимов и др., 1997; Afanasiev et al, 2010] показали, что при расчетах дисперсии фазы сигнала в случайно-

неоднородной среде можно использовать гауссову модель корреляционного эллипсоида, если в качестве пространственного масштаба неоднородностей считать внешний масштаб ионосферной турбулентности, заданной степенным спектром. Связано это с тем, что высокочастотная часть спектра неоднородностей в большей степени оказывает влияние на амплитуду сигнала и в меньшей степени на его фазу [Рытов, 1978].

В настоящем докладе предложена методика прямой диагностики состояния трансионосферного канала по статистическим траекторным характеристикам реперного сигнала.

ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В качестве измеряемых характеристик реперного сигнала на вспомогательной трассе будем рассматривать вторые статистические моменты фазы, групповой задержки и доплеровского смещения частоты. В лучевом приближении [Кравцов, Орлов, 1980] для отдельных реализаций этих характеристик в изотропной случайно-неоднородной ионосфере имеем [Гершман и др., 1984]:

$$\varphi = \frac{2\pi f}{c} \int^S \sqrt{\varepsilon(x, y, z, \tau)} dS, \quad t = \int^S \frac{dS}{c\sqrt{\varepsilon(x, y, z, \tau)}}, \quad \Delta f = -\frac{f}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \int^S \sqrt{\varepsilon(x, y, z, \tau)} dS \quad (1)$$

где: $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, \tau)$ - пространственно-временная случайная функция диэлектрической

проницаемости, τ - время, f - рабочая частота, c - скорость света, $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$

- элемент дуги траектории, соединяющей пункты приема и излучения реперного сигнала.

Для расчета траекторий используем систему стохастических дифференциальных уравнений с независимой переменной элемента дальности dx [Кляцкин, 2008]:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} = \cot \beta, \quad \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + \sin^2 \beta \tan^2 \alpha) \left(\frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial x} \cot \beta - \frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial z} \right) \\ \frac{dy}{dx} = \tan \alpha, \quad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + \cos^2 \alpha \cot^2 \beta) \left(\frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial y} - \frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial x} \tan \alpha \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где: x, y, z - текущие координаты луча, α, β - углы рефракции в азимутальной и угломестной плоскостях.

Статистические моменты траекторных характеристик реперного сигнала определим в приближении метода малого параметра [Арнольд, 1989]. Для функций, входящих в уравнения (1),(2) используем разложения: $\varepsilon = \varepsilon_0(z) + \varepsilon_1(x, y, z, \tau)$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, $t = t_0 + t_1$,

$$\Delta f = \Delta f_0 + \Delta f_1, \quad z = z_0 + z_1, \quad y = y_0 + y_1, \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1, \quad \beta = \beta_0 + \beta_1, \quad (3)$$

где: $y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0, \varphi_0, t_0, \Delta f_0, y_1, z_1, \alpha_1, \beta_1, \varphi_1, t_1, \Delta f_1$ - средние и флуктуационные характеристики сигнала; функция ε_0 - описывает среднюю диэлектрическую проницаемость канала, ε_1 - характеризует пространственно-временные случайные неоднородности ионосферы. Далее для простоты будем считать, что средняя траектория луча лежит в плоскости XOZ ($\alpha_0 = 0, y_0 = 0$). Подставляя разложения (3) в (1),(2) и выполняя вычисления с учетом граничных условий в пунктах приема и излучения, получаем уравнения для флуктуаций:

$$\varphi_1 = \frac{\pi f}{c} \int_0^{x_p} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{dx}{\sin \beta_0}, \quad t_1 = \int_0^{x_p} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z_0} \frac{F_p(x) dx}{c \sqrt{\varepsilon_0} \sin \beta_0} - \frac{1}{2} \int_0^{x_p} \frac{\varepsilon_1 dx}{c \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0} \sin \beta_0}, \quad \Delta f_1 = -\frac{f}{2c} \int_0^{x_p} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon_0} \sin \beta_0} \quad (4)$$

где: $F_p(x) = F_{1p}(x) + F_{2p}(x), \quad F_{1p}(x) = \frac{c R_{2p}(x) P_{1p}(x)}{2 \sin \beta_p R_{1p}(x_{исзр})}, \quad F_{2p}(x) = \frac{c R_{1p}(x) P_{2p}(x)}{2 \sin \beta_p R_{1p}(x_{исзр})},$

$$P_{1p}(x) = \int_0^x \frac{\sin \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z_0} R_{1p}(x) \frac{dx}{c \sqrt{\varepsilon_0}}, \quad P_{2p}(x) = \int_x^{x_p} \frac{\sin \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z_0} R_{2p}(x) \frac{dx}{c \sqrt{\varepsilon_0}} \quad (5)$$

$$R_{1p} = \frac{\partial z_0}{\partial \beta_p}(x), \quad R_{2p} = \frac{\partial z_0}{\partial \beta_p}(x_{исзр} - x) - \text{фундаментальные решения краевой траекторной задачи}$$

для реперного источника, β_p - угол входа реперного сигнала в канал (отсчитывается от вертикали), x_p - проекция на земную поверхность луча, прошедшего сквозь ионосферу и направленного на реперный источник с координатами: $x_{исзр}, z_{исзр}$. Интегрирование в (4),(5) проводится по средней траектории, являющейся решением системы уравнений на реперной трассе:

$$\frac{dz_0}{dx} = \cot \beta_0 \quad \frac{d\beta_0}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial \sqrt{\varepsilon_0}}{\partial z_0} \quad (6)$$

На основе (4), получим статистические моменты траекторных характеристик реперного сигнала на вспомогательной трассе. Рассмотрим условия квазиоднородного случайного поля неоднородностей канала. Функцию корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости зададим в виде [Гершман и др., 1984]:

$$N = \langle \varepsilon_1(x_1, y_1, z_1, \tau_1) \varepsilon_1(x_2, y_2, z_2, \tau_2) \rangle = N_1 N_0 \quad (7)$$

где N_0 - однородная часть корреляционной функции. Функция N_1 характеризует статистическую неоднородность случайного поля неоднородностей и учитывает непостоянство параметров неоднородностей в канале, причем функция N_1 изменяется более медленно, чем N_0 . В качестве функции N_1 рассмотрим зависимость $N_1 = \mu^2 (1 - \varepsilon_0)^2$, где

μ^2 - интенсивность случайных неоднородностей электронной концентрации ионосферы.

Движение неоднородностей учтем в рамках гипотезы о замороженном переносе:

$$N_0 = \exp\left(-\frac{1}{a^2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2 - V(\tau_1 - \tau_2))^2\right]\right), \quad (8)$$

где a - масштаб неоднородностей, V - скорость движения случайного поля неоднородностей. Составляя из (4) статистические моменты и проводя аналитические преобразования, для выбранной модели функции корреляции неоднородностей получаем интегральные выражения для дисперсий траекторных характеристик сигнала:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^2 &= \int_0^{x_p} \frac{\sqrt{\pi}\omega^2 a \mu^2 (1-\varepsilon_0)^2}{4c^2 \sqrt{\varepsilon_0} \sin \beta_p} dx, & \sigma_{fp}^2 &= \int_0^{x_p} \frac{f^2 \sqrt{\pi} V^2 \mu^2 (1-\varepsilon_0)^2 \sin \beta_0}{2a c^2 \varepsilon_0} dx \\ \sigma_{\Delta p}^2 &= 2 \int_0^{x_p} [F_p(x)]^2 \frac{\mu^2 (1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^2 \sin \beta_0} \sin^2 \beta_p \frac{\sqrt{\pi}}{a c^2} dx + \int_0^{x_p} \frac{\sqrt{\pi} a}{4c^2} \cdot \frac{\mu^2 (1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3 \sin \beta_0} dx \end{aligned} \quad (9)$$

где: $\omega = 2\pi f$. Решая уравнения (9) относительно неизвестных параметров корреляционного эллипсоида, получаем:

$$\mu^2 = \sqrt{\frac{J_1 \sigma_{\Delta p}^2 - J_3 \sigma_{\varphi}^2}{J_2 J_1}}, \quad a = \frac{\sqrt{J_2 \sigma_{\varphi}^2}}{\sqrt{J_1 \sigma_{\Delta p}^2 - J_3 \sigma_{\varphi}^2}}, \quad V = \sqrt{\frac{\sigma_{fp}^2 J_1 J_2}{J_4 (J_1 \sigma_{\Delta p}^2 - J_3 \sigma_{\varphi}^2)}} \quad (10)$$

где:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\sqrt{\pi}\omega^2}{4c^2 \sin \beta_p} \int_0^{x_p} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0}}, & J_2 &= \frac{2 \sin \beta_p \sqrt{\pi}}{c^2} \int_0^{x_p} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 F_p^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0^3}}, \\ J_3 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4c^2 \sin \beta_p} \int_0^{x_p} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0^5}}, & J_4 &= \frac{f^2 \sqrt{\pi}}{2c^2 \sin \beta_p} \int_0^{x_p} \frac{\sin^2 \beta_0 (1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0}} \end{aligned} \quad (11)$$

Определив параметры эллипсоида на вспомогательной трассе, можно рассчитать ожидаемые статистические характеристики основного сигнала на заданной трассе. Используя математический аппарат, что и выше, для моментов траекторных характеристик основного сигнала получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^2 &= \int_0^{x_k} \frac{\sqrt{\pi}\omega^2 a \mu^2 (1-\varepsilon_0)^2}{4c^2 \sqrt{\varepsilon_0} \sin \beta_n} dx, & \sigma_f^2 &= \int_0^{x_k} \frac{f^2 \sqrt{\pi} V^2 \mu^2 (1-\varepsilon_0)^2 \sin \beta_0}{2a c^2 \varepsilon_0} dx \\ \sigma_{\Delta t}^2 &= 2 \int_0^{x_k} [F(x)]^2 \frac{\mu^2 (1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^2 \sin \beta_0} \sin^2 \beta_n \frac{\sqrt{\pi}}{a c^2} dx + \int_0^{x_k} \frac{\sqrt{\pi} a}{4c^2} \frac{\mu^2 (1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3 \sin \beta_0} dx \end{aligned} \quad (12)$$

где:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x), \quad F_1(x) = \frac{c}{2 \sin \beta_n R_1(x_{исзк})} R_2(x) P_1(x), \quad F_2(x) = \frac{c}{2 \sin \beta_n R_1(x_{исзк})} R_1(x) P_2(x),$$

$$P_1(x) = \int_0^x \frac{\sin \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z_0} \frac{R_1(x)}{c\sqrt{\varepsilon_0}} dx, \quad P_2(x) = \int_x^{x_k} \frac{\sin \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z_0} \frac{R_2(x)}{c\sqrt{\varepsilon_0}} dx \quad (13)$$

$R_1 = \frac{\partial z_0}{\partial \beta_n}(x)$, $R_2 = \frac{\partial z_0}{\partial \beta_n}(x_{исзк} - x)$ - фундаментальные решения краевой траекторной задачи

для основного источника, β_n - начальный угол входа основного сигнала в канал, x_k - проекция на земную поверхность луча, прошедшего сквозь ионосферу и направленного на основной источник с координатами: $x_{исзк}$, $z_{исзк}$. Интегрирование в (12),(13) проводится по средней траектории, являющейся решением системы уравнений (6) на основной трассе.

Подставляя найденные параметры корреляционного эллипсоида (10) в (12) и проводя аналитические преобразования, имеем:

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{G_1}{J_1} \sigma_{\varphi\varphi}^2, \quad \sigma_f^2 = \frac{G_4}{J_4} \sigma_{ff}^2, \quad \sigma_{\Delta t}^2 = \frac{G_2}{J_2} \sigma_{\Delta t\varphi}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 \left(\frac{G_3}{J_1} - \frac{G_2 J_3}{J_2 J_1} \right) \quad (14)$$

где:

$$G_1 = \frac{\sqrt{\pi} \omega^2}{4c^2 \sin \beta_n} \int_0^{x_k} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad G_2 = \frac{2 \sin \beta_n \sqrt{\pi}}{c^2} \int_0^{x_k} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 F^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0^3}}$$

$$G_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4c^2 \sin \beta_n} \int_0^{x_k} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0^5}}, \quad G_4 = \frac{f^2 \sqrt{\pi}}{2c^2 \sin \beta_n} \int_0^{x_k} \frac{\sin^2 \beta_0 (1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0}} \quad (15)$$

Соотношения (14) определяют явную связь статистических траекторных характеристик основного и реперного сигналов на транссионосферных трассах. Проводя измерения $\sigma_{\varphi\varphi}^2$, σ_{ff}^2 , $\sigma_{\Delta t\varphi}^2$ реперного сигнала на вспомогательной трассе и задавая средний высотный профиль диэлектрической проницаемости ионосферы ε_0 , формулы (14) можно использовать для расчетов ожидаемых статистических траекторных характеристик сигнала на основной трассе.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Апробация методики прямой диагностики стохастического транссионосферного канала была выполнена путем постановки численного эксперимента. Для оценок ожидаемых дисперсий траекторных характеристик на заданных трассах в качестве входных данных использовались результаты расчетов траекторных моментов реперного сигнала на вспомогательной трассе, полученные при известных параметрах ионосферных неоднородностей. На Рис. 1 приведены траектории лучей, прошедших через ионосферу в направлении на спутники. Расчеты были выполнены для аналитической двухслойной модели

$$\varepsilon_0(z_0) = 1 - \frac{f_{крE}^2}{f^2} \exp\left(-\left(\frac{z_0 - z_{mE}}{y_{mE}}\right)^2\right) - \frac{f_{кр}^2}{f^2} \exp\left(-\left(\frac{z_0 - z_m}{y_m}\right)^2\right), \quad (16)$$

где z_{mE} , z_m , y_{mE} , y_m , $f_{крE}$, $f_{кр}$ высоты максимумов ионизации, полутолщины и критические частоты слоев. Параметры модели: $z_{mE} = 140$ км., $z_m = 400$ км., $y_{mE} = 40$ км., $y_m = 150$ км., $f_{крE} = 4$ МГц., $f_{кр} = 8$ МГц.

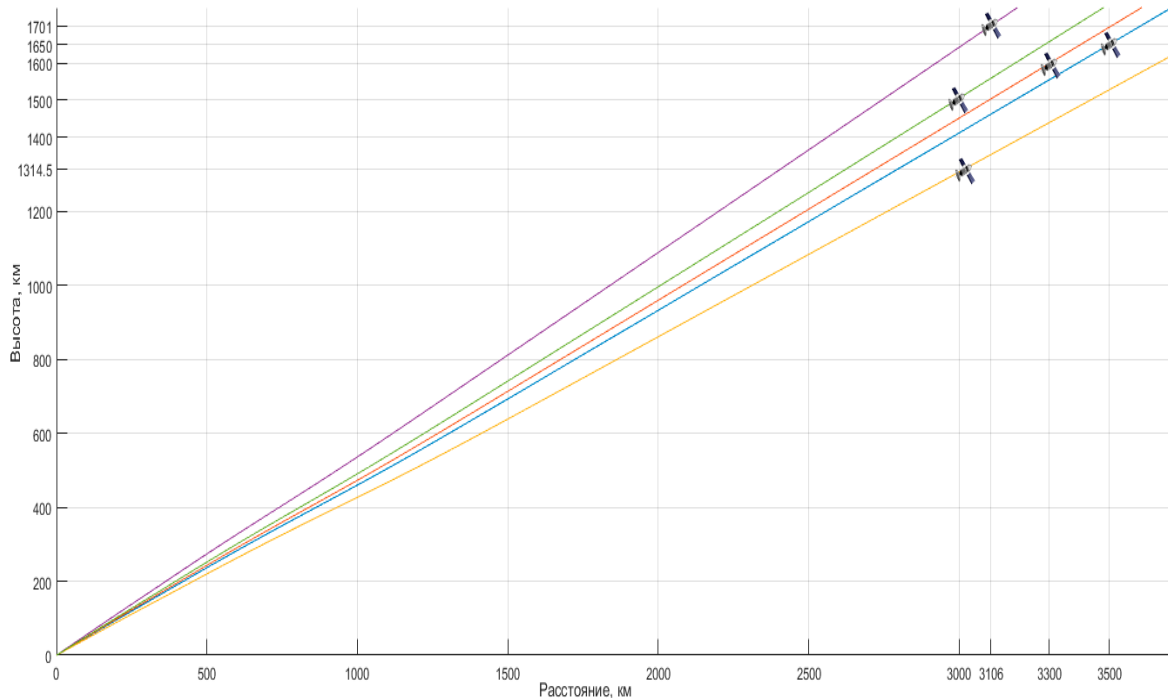


Рис.1. Трансионосферные лучевые траектории в основных и в реперном направлениях.

Для апробации методики диагностики было выбрано реперное направление с координатами: $x_p = 2990$ км., $z_p = 1500$ км. Параметры корреляционного эллипсоида с обобщенными свойствами поля случайных неоднородностей были взяты: $\mu^2 = 0.0004$ (соответствует возмущению электронной концентрации 2% от фоновой ионосферы), $a = 10$ км., $V = 50$ м/с. Для выбранных параметров на основе (9) рассчитывались дисперсии траекторных характеристик пробного сигнала на рабочей частоте $f = 45$ МГц. Полученные значения составили: среднеквадратичное отклонение фазового пути $\sigma_{\Phi p} = \frac{\sigma_{\Phi p} c}{2\pi f} = 27$ м., $\sigma_{fp} = 0.04$ Гц., среднеквадратичное отклонение группового пути $\sigma_{\Delta p} = c \sigma_{\Delta p} = 40.2$ м. Найденные величины дисперсий использовались в (14) для определения ожидаемых статистических характеристик сигналов на заданных трассах различного направления. Интегральные коэффициенты, входящие в (14), рассчитывались путем совместного численного интегрирования систем уравнений для основного источника (уравнения (6),(13),(15) и для пробного (уравнения (5),(6),(11) с соответствующими начальными условиями. Полученные значения статистических характеристик приведены в Таблице 1.

Таблица 1. . Ожидаемые статистические траекторные характеристики сигналов в транссионсферном канале (направление на реперный источник: $x_p = 2990$ км., $z_p = 1500$ км.)

z_k (км.)	x_k (км.)	σ_Φ (м.)	σ_f (Гц.)	$\sigma_{\Delta L}$ (м.)
1701	3106	28	0.037	37.5
1314	3020	32	0.043	43
1650	3500	31	0.041	41.5
1600	3300	30.5	0.0409	40.8

Из Таблицы 1 следует, что рассчитанные ожидаемые флуктуации фазы, доплеровского смещения частоты и групповой задержки сигналов на транссионсферных трассах находятся в соответствии с известными физическими представлениями о процессе рассеяния метровых радиоволн на ионосферных неоднородностях, превышающих размер первой зоны Френеля [Рытов и др. 1978]. Вместе с тем необходимо заметить, что при расположении пунктов приема и излучения основного или реперного сигналов в окрестностях точек фокусировки поля [Крюковский, 2012], полученные выше соотношения требуют модификации. В этих точках фундаментальные решения $\frac{\partial z_0}{\partial \beta_n}$, $\frac{\partial z_0}{\partial \beta_p}$ обращаются в ноль и в формулах (5),(13) возникают особенности, связанные с ветвлением решений краевых траекторных задач для основного и пробного источников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена методика прямой диагностики статистических траекторных характеристик сигнала на транссионсферных трассах по данным измерений характеристик реперного сигнала на вспомогательной трассе. Для реализации методики используется модель средней диэлектрической проницаемости ионосферы. Такая модель может быть задана аналитическим профилем, наиболее соответствующим геофизической обстановке. Также допускается использование современных глобальных моделей, которые определяют электронную концентрацию ионосферы в виде дискретных данных. Применяя бикубическую сплайн-интерполяцию дискретных профилей электронной концентрации, можно обеспечить непрерывность производных первого и второго порядка, что требуется при расчетах. Результаты численного эксперимента показали работоспособность используемого математического аппарата для оценки ожидаемых вторых статистических моментов фазы,

групповой задержки и доплеровского сдвига частоты сигналов на трансионосферных трассах в условиях, когда пункты излучения и приема находятся вне окрестностей точек фокусировки волнового поля. Методика прямой диагностики стохастического трансионосферного канала может быть использована в многочастотном режиме. Для повышения качества диагностики возможно введение модели анизотропного корреляционного эллипсоида неоднородностей, ориентированного относительно радиотрассы. Параметры этого эллипсоида можно определить по характеристикам реперного сигнала на вспомогательной трассе с учетом априорной информации о типичных свойствах неоднородностей (например, их вытянутости вдоль силовых линий геомагнитного поля)

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (гос.задание FZZE-2020-0017) и гранта РФФИ № 19-52-44002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алимов В.А., Рахлин А.В., Выборнов Ф.И. Модель взаимодействия ДКМВ-ДМВ радиоволн с сильно неоднородной среднеширотной ионосферой // Изв. вузов Радиофизика. 1997. Т.40, № 11. С.1323-1341.

Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984. 392 с.

Гусев В.Д., Овчинникова Н.П. Модельное определение объемных характеристик неоднородностей ионосферы // Геомагнетизм и аэрномия. 1980. Т.20, №4. С. 626-631.

Кляцкин В.И. Стохастические уравнения. М.: Физматлит, 2008. Т. 1. 317 с.

Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.

Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме. // Радиотехника и электроника, М.: Наука. 2012. Т.57. №9. С. 1028-1034.

Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2: Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.

Afanasiev N.T. , Afanasiev A.N., Larunin O.A., Markov V.P. Phase fluctuations of radio waves experiencing total reflection from a randomly inhomogeneous plasma layer // J. Atmos Solar-Terr. Phys. 2010. V. 72, Iss. 7-8. P. 583-587.

Davies K. Ionospheric Radio. Stevenage: Publish. Institution of Engineering and Technology, 1990. 600 p.